無限小解析学成立時における応用問題 : 逆接線問題を例として(数学史の研究)

但馬, 亨

数理解析研究所講究録
1513巻 2006年 27-35

無限小解析学成立時における応用問題
—逆接線問題を例として —

東京大学大学院・総合文化研究科　但馬　亨 (TAJIMA, Toru)
Graduate School of Arts and Sciences
The University of Tokyo

はじめに

十七世紀の無限小解析学 (infinitesimal analysis) の成立史を考察する上で，微分計算の基本公式が発表されたライプニッツ (G. W. Leibniz, 1646-1716) の著名論文「極大・極小を求める新方法」は重要な到達点である．しかし，この論文が成立する以前に，いかなる試行錯誤のプロセスが経過されてきたのか，という問いに答えるのはそれほど容易なことではない．その過程を解明するためには，無限小解析学が解決を要請された，当時の未解決問題への対処を詳細に調べる必要がある．本論では，中でも当時隆盛を極めていた接線問題とその応用としての逆接線問題を中心として，無限小解析学の誕生と確立の有様を理解してみたい．

加えて自然現象の微分方程式による記述という近代数理科学の基本的概念が，いわゆる微積分学と古典力学の関係以外にもどのように生まれたかを，ライプニッツの興味深い事例に基づいて紹介してみたい．この探求の過程から十七世紀の数学者にとって微積分学の成立に深く関わる応用問題と，その自然現象記述への応用が密接に関係していたことが分かるのではないだろうか．

1. ライプニッツ記号法の変容 —無限小解析学の胎動—

ライプニッツによる無限小解析学の本格的創始がパリ時代 (1672-76) になされたことは，あまりにも有名であるが，その中でも先立つイタリアの数学者カヴァリエリ (Bonaventura Cavalieri, 1598-1647) の記号法が彼に与えた影響は極めて大きいものがある．ライプニッツは初等的な相似三角形を利用した問題をカヴァリエリの方法で解こうとする．

「求積解析第２部」(Analyseos tetragonisticae pars 2da. 29, Oct. 1675.)[*1]

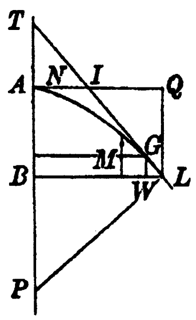

図１　「求積解析第２部」

*1 [LBG] pp151-6; [Child] 76-83; [ライプニッツ 1997] pp. 157-170.

（1）接線問題の処理とカヴァリエリの記号法

図1で $BL = y, WL = l, BP = p, TB = t, AB = x, GW = a, y = omn.l$ とする．[*2]
このとき

$$\frac{l}{a} = \frac{p}{omn.l} \Rightarrow p = \frac{omn.l}{a} l. \tag{1}$$

したがって

$$omn.p = omn.\overline{\overline{\frac{omn.l}{a}}.l} \tag{2}$$

また，「別のことから証明した」(aliunde demonstravi ...) と述べ，バロウの『幾何学講義』(XI,1) で示された結果を導入．[*3]

$$omn.p = \frac{y^2}{2} = \frac{\overline{omn.l}\,\boxed{2}}{2} \tag{3}$$

これを (2) 式に代入．

$$\frac{\overline{omn.l}\,\boxed{2}}{2} = omn.\overline{\overline{omn.l}\frac{l}{a}} \tag{4}$$

「最高に美しく，そして決して自明ではない定理」(Pulcherrimum ac minime obvium Theorema) と称す．

つづいて部分積分法の一例 ($omn.\overline{xl} = x\overline{omn.l} - omn.\overline{omn.l}.$)[*4]を示す．これは完全な一般化には至っていないが，すでにライプニッツには，

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

の認識がある．

（2）微積分記号の導入と逆演算の認識

つづいて，まったく唐突としかいい得ないタイミングで以下の記述が残される．「$omn.$ にかわって $\int$ と記されるのは有用になるであろう」(Utile erit scribi $\int$ pro $omn.$, $\cdots$) と述べ，(4) 式を書き換える．ここに史上初めて，ライプニッツによる積分記号が導入される．

$$\frac{\int \overline{l}^2}{2} = \int \overline{\int \overline{l} \frac{l}{a}}$$

そして最終的に微分記号 d の導入と微分・積分の逆演算関係の認識が現れる．

> l, x に対する関係が与えられ，$\int l$ が求められる．そこで逆の計算においては，どうなるかというと，すなわちもし $\int l = ya$ であるならば，わたしたちは $l = \frac{ya}{d}$ とおくだろう．すなわち，$\int$ が次元を増やすように，d は次元を減らす．他方，$\int$ は和を，d は差を表す．(Datur l, relatio ad x, quaeritur $\int$. Quod fiet jam contrario calculo, scilicet si sit $\int l = ya$, ponemus $l = \frac{ya}{d}$. Nempe ut $\int$ augebit, ita d minuet dimensiones. $\int$ autem significat summam, d differentiam.)

[*2] $omn.l$: *omnes* を指す．カヴァリエリの1635年の著作，『ある種の新しい理論において推進された，連続体の不可分量の幾何学』(*Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*) ではじめて出現する略語．ライプニッツはこの書には1672-76年のパリ遊学以前にすでに接していたが，1703年4月のヤーコプ・ベルヌーイ宛書簡では，「ローマの歴史物語 (Historias Romanenses) を読むように読んだ．」と述べている．cf. [LMG] vol. 3, p. 72

[*3] Isaac Barrow, *Lectiones geometricæ*. London, (1670); Hildesheim, (1973)

[*4] 現代的に表記すれば，$\int xdy = xy - \int ydx$.

ただ，この段階では記号 d は次元の減少を指示させるために，分母におかれていた．ライプニッツによる微積分の逆演算の関係が，あくまでも和と差のアナロジーによって理解されていたことがここからも分かる．研究者によっては，微分という訳語をそもそもこの時点で当てはめることに慎重な姿勢を維持される方もいるが，それは上記の理由の理解からである．[*5]さて，同年 11 月には記号法の整備がいよいよ完了し，当時未解決問題へと向かう．その一つの成功例が，デカルトが取り組み部分的に未解決であった Debaune 問題であった．

2. デカルト由来の逆接線問題への返答
— Debaune 問題への取り組み，対数曲線の導入—

「逆接線法」(Methodus tangentium inversa. Jul. 1676.)[*6]

Debaune 問題とは何か？この問題自体に触れる前にライプニッツは古くはフェルマー (Pierre De Fermat, 1601-1665) に遡り，接線法の数々に対してなされた先人の手法に批評を展開している．これらの数学者のいわば印象批評からライプニッツ自身の新方法についての強い自負を読み取ることができるが，その紹介を行う前にライプニッツが研究した当時のデカルト著作集を紹介したい．

（1）テキストの特徴

ライプニッツの以下に述べる引用は，スコットランドの数学者ジョン・ネーピア (John Napier, 1550-1617) による対数の発見からはじまり，もちろんこのデカルトを経て，十八世紀のレオンハルト・オイラー (Leonhard Euler, 1707-83) による 2 関数 $y = \log x$, $x = e^y$ の逆関数関係の最終的認識に連なる研究問題の一部として数学史的に配置されるものである．ある直線が与えられて，それを接線とするような曲線を求める問題，すなわち逆接線問題のその中でも特殊事例である，対数曲線を扱うケースは Debaune の問題と呼ばれ，当時の数学者たちの間では難問視されていた．デカルトの同時代人フロリモント・ド・ボーヌ (Florimond De Beaune , 1601-52) はブロアの法律家であったが，友人デカルトへ各種の曲線問題を提示する．この手紙に対してのデカルトの返答は 1639 年になされ，現代のアダン・タンヌリ版全集では第 2 巻 ([DO]) に収録されている．この返答は当時から公刊され，十七世紀版のデカルト書簡集の著名な版である，クレルスリエ版『デカルト書簡集』(*Les lettres de René Descartes*, 3 vols.; Paris, ed. C. de Clerselier, 1657-67) に収録される．ライプニッツが読み込んだのはまさにこのテキストであった．

① 『書簡集』の引用とライプニッツによる注釈

> 私はデカルトの著作 [当然のことながら『書簡集』を指す] の第 3 巻で，彼が**フェルマーの極大・極小法は一般的**ではないと考えているのを知っている．実際彼は，「その上の任意の点から与えられた 4 点に引かれた直線 [の和] が与えられた直線に等しいという性質をもつ曲線の場合，フェルマーの方法はその接線を発見するのに役立たない [『書簡集』第 63 書簡，p.362]」と彼 [デカルト] は考える．(In Tertio Tomo literarum Cartesii video eum credidisse **methodum Fermatii de maximis et minimis non esse universalem**, putat enim (pag. 362 epist. 63) non servire ad in veniendam tangentem curvae, cujus natura sit ut ex quovis puncto ejus ductae rectae ad quatuor puncta data aequentur rectae datae.)

そして以下でデカルトが部分的には果たせなかった問題の解法の叙述が始まる．

②欄外の書き込み

> わたしは或る日，逆接線問題に関する 2 つの問題を解いた．ひとつはデカルトのみが解いたのではないが，もうひとつは彼自身が決して解けない，と告白したものである．(Solvi una die duo problemata methodi tangentium inversæ, quorum alter[u]m nec solus solvit Cartesius, alterum ne ipse quidem fassus [est] non posse.)

[*5] 同年 11 月 11 日付けの草稿「逆接線法の例」(Methodi tangentium inversæ) では，dy というように，分数形式が改まる．他に微分の積，商などの計算が確認される．なお原亨吉氏は「差分」という訳語を導入している．

[*6] [LBG] pp. 201-3; [Child], pp. 118-22; [ライプニッツ 1997] pp. 211-216.

逆接線問題（1）：一定の接線影をもつ曲線の決定

まず②で述べられたデカルト自身によって解けた方の問題をみてみよう．ここでライプニッツはデカルトの手法をそのまま踏襲することを潔しとはせず，新記号法をもって新たに解き直しを行っている．以下に問題の本質的部分を載せる．

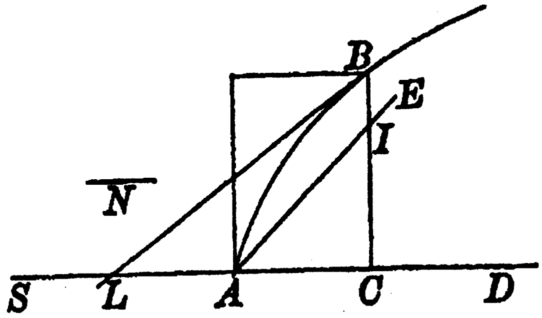

図2　逆接線問題（1）

図2において，角EAD＝45°，求める曲線をAB，BLを接線，CA＝x，BC＝yとする．このとき$\dfrac{BC}{CL}=\dfrac{n}{BJ}$と仮定．ただし，$CL=\dfrac{BC\times BJ}{n}=\dfrac{y(y-x)}{n}$であるのに，ライプニッツの草稿では誤って$CL=\dfrac{BC\ n(=yn)}{BJ(=y-x)}$と書かれている．このまま誤りは修正されず，$CL=t$とすると，$\dfrac{t}{y}=\dfrac{d\overline{x}}{dy}$から，

$$\frac{d\overline{x}}{dy}=\frac{n}{y-x}.$$

式を変形し両辺の総和をとると，

$$\int d\overline{x}y-\int\overline{xd\overline{x}}=n\int dy$$

したがって，

$$ABCA=\frac{x^2}{2}+ny=\frac{AC^2}{2}+nBC$$

を満たす曲線が題意の曲線だと結論している．実はこの解自体は誤りで，超越曲線が生じるのが正しいのだが，代数曲線の範囲で収まる例としてライプニッツはそのまま看過してしまう．このこと自体は誤りだが，ライプニッツは決して超越曲線の存在について無理解ではない．それは続く第2問題から明らかになる．[*7]

逆接線問題（2）：デカルト未解決の Debaune 問題と超越曲線

つづいて，デカルトによっては解が得られなかった第2問題について，ライプニッツの新記号法を用いた解法を見てみよう．ここで確実に認識されていたのは，デカルトが機械曲線として代数曲線より低位とした，超越曲線によって表示される解であった．

[*7] cf.　正しくは　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{n}{y-x}$となり，最後まで解くと解は$x=y+nlog(-n+y-x)$．なお，デカルト自身は特殊な作図による論証で問題の微分方程式が対数によって表されることに気付いている．この点でデカルトはほぼ解を得たと言ってよいが，最後の部分でこの曲線が対数曲線となるところまでとは言及せず，以下の式で表わされる不等性を導いて筆をおいている．cf. [DO] Vol. 2, pp. 510-523 : [DCA] Vol. 3, pp. 184-194., 数学的内容の概説としては [デカルト 1973] p.120 の原による解説参照．

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{m-1}>\log\frac{m}{n}>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m}.$$

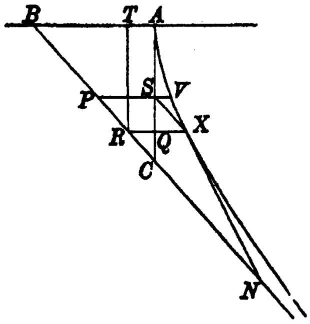

図３　逆接線問題（２）

ＢＣは曲線の漸近線，ＢＡは軸，Ａは頂点，角ＢＡＣ＝$\angle R$，ＲＸを縦線，ＸＮを接線とそれぞれしたときに，常にＲＮとＢＣが等しくなるような曲線は何か？

まず，$PV = RX + SV$ となるような縦線ＳＶをとる．ＲＮと平行なＸＳを引くと，$\Delta SVX \backsim \Delta RXN$ となる．さらに，$RN = c$, $PR = SX = d\bar{x}$, $BR = x$, $RX = y$, $SV = d\bar{y}$ とすると，$\dfrac{d\bar{y}}{d\bar{x}} = \dfrac{y}{c}$ ゆえに，$cy = \int \overline{yd\bar{x}}$，もしくは $cd\bar{y} = yd\bar{x}$.

ＡＱ＝ＴＲ＝ｚ，ＡＣ＝ｆ，またＢＣ＝ａとすると，$\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{f}{a} = \dfrac{TR}{BR} = \dfrac{z}{x}$ となるから，$x = \dfrac{az}{f}$.　$d\bar{x}$ が一定ならば，$d\bar{z}$ も一定．$cd\bar{y} = y\dfrac{a}{f}d\bar{z}$.

両辺を y で割り，総和をとると，

$$c\int \frac{d\bar{y}}{y} = \frac{a}{f}z.$$

また，ライプニッツは 1675 年 10 月 26 日の「重心論による求積解析２」*8で既に双曲線の求積を行い $\int_0^x \frac{a}{x}dx = a\log y$ となることを知っていたが，本草稿でライプニッツの対数曲線導出への確信はさらに揺るがないものとなった．以下のように議論は閉じられる．

> …これ $(\int \frac{d\bar{y}}{y})$ は対数曲線に属する．以上でデカルト『書簡集』第３巻の逆接線法の問題をわれわれはすべて解いたのであるが，ひとつは彼 [デカルト] 自身で解いたと，第３巻書簡 79，p. 460 ではされているが，解法は存在しない．もう一方は解こうと試みたが，解けず，線は不規則であり，どこかに表現するための技術がなければ，人間の能力におけるどころか，天使のそれを用いてもできないような表現が使用されるしかない，と [デカルトは] 告白したのである．(…, quae est ad **logarithmicam**. Ita solvimus omnia problemata methodi tangentium inversæ in tomo 3. Epistolarum Cartesii, quorum unum solvit ipse, ut ait pag. 460 Epist. 79 Tom 3; sed solution non extant; alterum solvere tentavit, sed non potuit, fassus irregularem esse lineam et descriptione utendum esse, quæ utique non est in humana potestate, imo nec angelica nisi aliunde constet ars describendi.)

まさにここで，ライプニッツの言葉をそのまま借りれば「天使の能力」を上回る数学的表現技法を解析学が見つけたのである．

3. 「新方法」に見る基本公式とその応用

「分数式にも無理式にも煩わされない極大・極小ならびに接線を求める新しい方法，またそれらのための特別な計算法」

---

*8 [LBG] pp. 149-51; [ライプニッツ 1997] pp. 153-6

(Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus. Oct. 1684.)[*9]

（1）微分計算の基本公式の提示

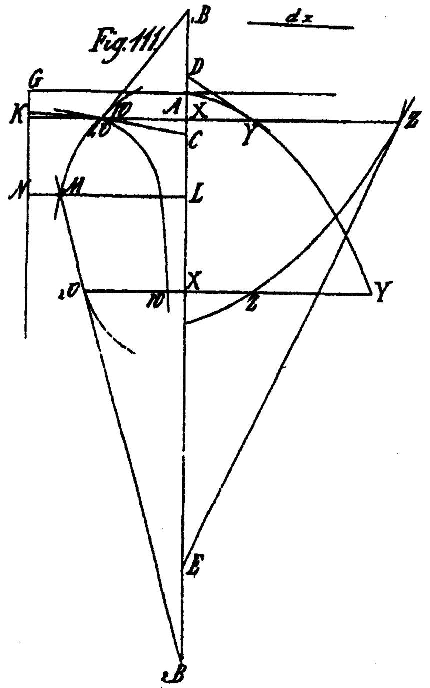

図4 『新方法』（1）

『新方法』（1）の図において $(AX, VX, WX, YX, ZX) = (x, v, w, y, z)$ と設定したとき以下の公式が成り立つこと．[*10]

- $d(ax) = adx$
- $y = v \Rightarrow dy = dv$
- $v = z - y + w + x \Rightarrow dv = d(z - y + w + x) = dz - dy + dw + dx$
- $d\overline{xv} = xdv + vdx$
- $d(\frac{v}{y}) = \frac{ydv - vdy}{y^2}$
- $dx^a = ax^{a-1}dx$
- $d\frac{1}{x^a} = -\frac{adx}{x^{a+1}}$
- $d(\sqrt[b]{x^a}) = \frac{a}{b}dx\sqrt[b]{x^{a-b}}$
- $d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} = \frac{-adx}{b\sqrt[b]{x^{a+b}}}$

この段階で，ようやくライプニッツ時代の無限小解析学はアルゴリズムの同定の点で，完成の域に達したことが理解できるであろう．注目すべき点を挙げるならば，①d は当初から「作用素」としての役割を担っていたこと．②$dv = 0$

*9 [LMG] vol. 5, pp. 220-226; [ライプニッツ 1997] pp. 296-307

*10 商の公式の実際の記述は，複合は縦線，横線ともに正の値のみを念頭におくため，$d(\frac{v}{y}) = \frac{\pm vdy \mp ydv}{y^2}$ ｝.

のとき極大・極小をとること，$ddv=0$ における変曲点存在の指摘されていること[*11]．などがある．こうして，極大・極小・接線問題の解決，分数量・無理量に及ぶ微分計算のアルゴリズム化完成の宣言が行われた．

> 私が**微分算**と呼ぶ，この計算のいわゆる**アルゴリズム**として知られた知識からほかのあらゆる微分方程式が通常の計算によって見出され，また極大・極小，さらには接線が得られる．[*12]**分数量，無理量，または他の根号**は取り除く必要はなく，[計算は] これまで発表された方法によってなされるべきである．(Ex cognito hoc velut **Algorithmo**, ut ita dicam, calculi hujus, quem voco **differentialem**, omnes aliae aequationes differentiales inveniri possunt per calculem communem, maximaeque et minimae, itemque tangentes haberi, ita ut opus non sit **tolli fractas aut irrationales aut alia vincula**, quod tamen faciendum fuit secundum Methodus hactenus editas.)

これらの基本公式の確認作業の後，実際の応用問題が示される．ニュートンによる流率法が彼の古典力学の理論と密接に関係していたこととは異なり，ライプニッツによって応用問題の先頭に配置されるのは光学の問題であった．

応用例（1）—屈折の法則への適用—

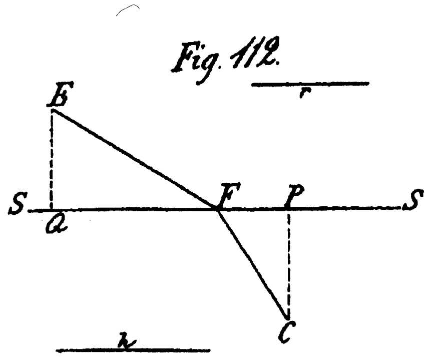

図 5 『新方法』(2)

2点C，E，ならびに同一平面上に直線ＳＳが与えられているとし，ＣＦとＥＦを結ぶときに，$CF\times h+EF\times r$ を最小にするような点Ｆを求める（ただし h,r は与えられた定数，光学的にはそれぞれの側の媒質の密度）．さらに点Ｃ，Ｅの垂線の足をそれぞれＰ，Ｑ，そして各線分を $(QF,CF,EF,CP,EQ,PQ)=(x,f,g,c,e,p)$ とする．

$$FP=p-x, f=\sqrt{c^2+p^2-2px+x^2}=\sqrt{l}, g=\sqrt{e^2+x^2}=\sqrt{m}.$$

したがって，$\omega=h\sqrt{l}+r\sqrt{m}$ とおくとき，

$$d\omega=\frac{hdl}{2\sqrt{l}}+\frac{rdm}{2\sqrt{m}}=0$$

を解けばよい．さて $dl=-2dx(p-x), dm=2xdx$ から，

$$\frac{h(p-x)}{f}=\frac{rx}{g}$$

となる．さらに $f=g$ とすると，

$$\frac{h}{r}=\frac{x}{p-x}=\frac{QF}{FP}.$$

[*11] 原語では逆屈曲点：punctum flexus contrarii とされる．

[*12] Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmi は 9 世紀初頭に活躍したアラビアの数学者，天文学者，12 世紀に彼の『インド人らの計算書』(Kitāb al-ḥisāb al-Hindī) がスペインでラテン語訳され，その冒頭には “Dixit Algorizmi.” と書かれた．これが，“algorisumus” とラテン語訳され，ライプニッツに至っては本来の意味が忘れられ，しかもギリシャ語の語彙との混同から “algorithmus” とされた．

したがって,「入射角と屈折角の正弦 FP と QF」は「媒質の密度 r と h の逆比」になる. 17 世紀において盛んであった光学の基本法則の証明も,ライプニッツによれば「この計算に通じたものであれば,今後3行もあれば示してしまうだろう.」とされる.形式的計算こそが重要であり,屈折光学の特殊性を考慮する必要はない.このようにしてライプニッツの方法は,接線法・逆接線法等の領域のみで一般性を獲得したのではなく,さまざまな自然現象を微分方程式で表現し,その方程式を形式的演算で解法する,という精密科学研究の新しいモデルを提示した.

応用例(2)—線分の和の問題—

そして,最後に扱われるのは,奇妙な級数の問題である.接線問題の一つの応用形であり,平易なものだが,ここでも最後尾にある解説から,これまでの代数学とは決定的に違う,新解析学の優れた操作性についての自負が伺われ,大変興味深い.以下問題に実際にふれよう.

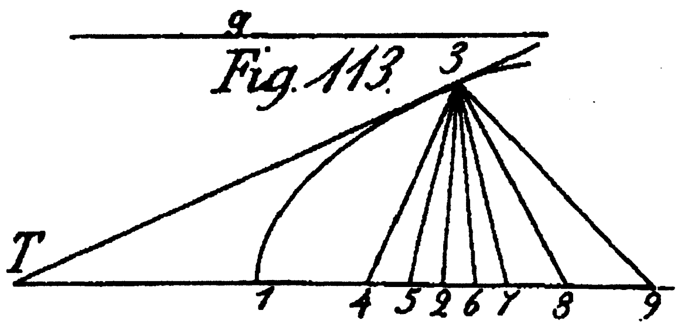

図6 『新方法』(3)

曲線上の任意点(3)から軸(T9)に引かれた6直線(34, 35, 36, 37, 38, 39)の総和が与えられた直線に等しくなるようにする.軸と3における曲線の交点をTとすると,以下のような比が成り立つ.

$$\frac{T2}{23} = \frac{+\frac{23}{34} + \frac{23}{35} + \frac{23}{36} + \cdots + \frac{23}{39}}{-\frac{24}{34} - \frac{25}{35} + \frac{26}{36} + \cdots + \frac{29}{39}}.$$

先行する問題とは違って,ここでは微分方程式の導出や証明[*13]は与えられていないが,「仮に10点以上の定点が設定されても」(sed decem, vel plura puncta fixa supponerentur...),問題の解決は可能と述べる.なお,最後部でA2の逆接線問題を再び扱うが,ここでは積分記号 $\int$ は用いられていない.

いよいよ本稿の最後部では,ライプニッツによる既存の接線法の欠点が述べられ,新方法の長所が賛美される.

> ・・・既に公表されている接線法にしたがい,無理量を消去しつつ計算によって獲得することは,**最高に面倒でときには克服できないような作業**であろう.・・・(中略)・・・ところがわれわれの方法は,このようなすべての場合だけでなく,それよりはるかに複雑な場合にも,世の想像を遥かに超え,ほとんど無類の簡潔さをもっているのである.(・・・qualia secundum methodus tangentium editas calculo praestare sublatis irrationalibus, **taediosissimae et aliquando insuperabilis operae** foret ・・・in quibus omnibus, et multo implicatioribus, methodi nostrae eadem est opinione multo major rarissimique exempli facilitas.)

[*13] 証明:接点3を(x,y),定点4, 5, 6, ⋯, 9をそれぞれ $(t_4,0)(t_5,0)(t_6,0),\cdots,(t_9,0)$ とおくと,条件より $\sum_{i=4}^{9}\sqrt{(x-t_i)^2+y^2} = g$. $\cdots(a)$ (g は与えられた定数).ここで,さらに $(x-t_i)^2+y^2 = l_i$ $\cdots(b)$,ただし $(i = 4,\cdots,9)$ とおく.すると (a) 式は $\sum_{i=4}^{9}\sqrt{l_i} = g$ となり,その差分方程式を求めると $\sum_{i=4}^{9}\frac{dl_i}{2\sqrt{l_i}} = 0.$ $\cdots(c)$.また (b) 式より,

$2(x-a_i)dx + 2ydy = dl_i$ これを (c) 式に代入しまとめると,$\frac{dx}{dy} = \frac{\sum\frac{y}{\sqrt{l_i}}}{\sum\frac{t_i-x}{\sqrt{l_i}}} = \frac{T2}{23}.(Q.E.D.)$

結語：ライプニッツ「プログラム」の始動

応用問題と称して，幾つかの無限小解析学黎明期の問題を紹介してきたが，ライプニッツは歴史的に解析学，代数学，ひいては数学自体を捉えていた．それは，彼の問題意識にフェルマー，デカルト，カヴァリエリと続く大陸の数学の伝統が脈々と息づいているし，また部分的にはグレゴリーなどの優れたイギリスの数学の伝統も貫流していることからも明らかであろう．このようにして，ガリレオが『新科学対話』で述べた，数学の中にこそ自然そのもののしくみが隠されているという主張が，実際にある自然現象とそれを記述する微分方程式の対応関係で裏打ちされた．こうして数学者は「遥かに崇高なある幾何学の出発点」(initia tantum Geometriae cujusdam multo sublimioris) に立つことになった．

凡例

[Child] Child, J. M., *The early mathematical manuscripts of Leibniz,* Chicago-London, 1920.

[DO] Descartes, René, *Œuvres*, ed. par C. Adam, P. Tannery. Paris 1897/1913 (13 vols.)

[DCA] Descartes, René, *Correspondance*, ed. par C. Adam, G. Milhaud. Paris. 1936.

[LBG] Leibniz, G. W., *Der Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern; hrsg. von C. I. Gerhardt.* Berlin, 1899; Hildesheim, 1962.

[LMG] Leibniz, G. W., *Leibnizens Mathematische Schriften; hrsg. von C. I. Gerhardt.* Halle, 1849-63; Hildesheim-New York, 1971.

[デカルト 1973] 『デカルト著作集』1『幾何学』他，原亨吉他訳（白水社，1973 年）

[ライプニッツ 1997] 『ライプニッツ著作集』2『数学論・数学』，原亨吉・佐々木力・三浦伸夫・馬場郁　他訳（工作社，1997 年）

参考文献

[Aiton 1985] Aiton, Eric J., *Leibniz A Biography* Bristol-Boston, 1985.

[Belaval 1960] Belaval, Yvon: *Leibniz Critique de Descartes*, Paris, 1960.

[Bos 1974] Bos, Henk J. M., "Differentials, Higher-Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian Calculus," *Archive for History of Exact Sciences 14.*(1974), pp. 1-90.

[Costabel 1985] Costabel, Pierre, "Descartes et la Mathématique de l'infini," *Historia Scientiarum 29.*(1985), pp. 37-49.

[Knobloch 1990] Knobloch, Eberhard, "L'infini dans les mathématiques de Leibniz," in *L'infinito in Leibniz: Problemi e terminologia* a cura di Antonio Lamarra (Roma: Edizioni dell'Ateneo, 1990), pp. 33-51.

[Scriba 1961] Scriba, Christoph J., "Zur Lösung des 2. Debauneschen Problems durch Descartes, –Ein Abschnitt aus der Frühgeschichte der inversen Tangentenaufgaben–" *Archive for History of Exact Sciences 1.*(1961), pp. 406-419.

[Scriba 1964] Scriba, Christoph J., "The Inverse Method of Tangents: A Dialogue between Leibniz and Newton (1675-1677)," *Archive for History of Exact Sciences 2.*(1964), pp. 113-139.

[林 1999] 林知宏「ライプニッツ数学思想の形成」（東京大学大学院総合文化研究科博士論文），1999 年.